**9. УМНОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ С ПЛАВАЮЩЕЙ ЗАПЯТОЙ**

1. **Основные положения**

Операция умножения сводится к сложению порядков как целых чисел и перемножению мантисс сомножителей как дробных чисел с фиксированной запятой.

В связи с тем, что, независимо от знака, мантиссы чисел с плавающей запятой представляются в прямом коде, то для умножения мантисс целесообразно использовать метод умножения в прямых кодах. Т.к. порядки сомножителей представлены не в явном виде, а со смещением (в виде характеристик), то для получения характеристики результата (произведения) необходимо выполнить следующие операции над характеристиками операндов:

*ХА* = Р*А* + *d*                    *C = A·B*

*ХB* = Р*B* + *d*

*ХА+ХB* = Р*А*+Р*B*+2*d.*

                  P*C*

*XC* = P*C + d;*

***XC = XA + XB – d.***

Замечание: будем считать, что в операции умножения участвуют именно нормализованные числа с плавающей запятой.

При использовании правильных дробей для представления мантисс сомножителей результат перемножения мантисс может находиться в следующих пределах:

1/*S* ≤ M*A* < 1

1/*S* ≤ M*B* < 1

**1/*S*2 ≤ M*C* = M*A*·M*B*< 1**

Из полученного соотношения следует, что результат умножения двух нормализованных мантисс может оказаться денормализованным вправо, но максимум – на одну цифру.

Действительно:

*S* = 2  →  M*C*min = (0,01)2;

*S* = 16 →  M*C*min = (0,01)16 = (0,00000001)2.

Умножение чисел с плавающей точкой в стандарте IEEE-754 имеет ряд дополнительных нюансов.

1. **Особые случаи при выполнении операции умножения**

К ним относятся *переполнение* и исчезновение (*антипереполнение*) порядка.

1) Переполнение порядка имеет место при умножении очень больших сомножителей.

2) Антипереполнение порядка имеет место при очень маленьких (близких к нулю) сомножителях.

В принципе, наличие особого случая можно распознать на начальном этапе операции, связанном с формированием предварительной характеристики произведения. Так, например, если сумма характеристик операндов меньше величины смещения, то можно, не перемножая мантиссы, фиксировать особый случай исчезновения порядка.

Другой крайний случай можно зафиксировать, если после вычитания смещения из суммы характеристик операндов полученная таким образом характеристика произведения будет превышать максимально возможное значение, т.е. выходить за пределы формата характеристики.

Следует иметь в виду, что после перемножении мантисс операндов может понадобиться нормализация результата сдвигом влево и уменьшение порядка произведения на 1.

1. **Методы ускорения операции умножения**

В связи с тем, что операция умножения является достаточно массовой, по крайней мере при решении научно-технических задач (по статистике доля операций умножения в программах научно-технического профиля составляет порядка 5%), значительное внимание разработчиков ЭВМ уделяется различным способам ускорения операции умножения. Эти способы ускорения принято разделять на два класса (вида):

-  *аппаратные* (схемные);

-  *логические* (алгоритмические).

Схемные методы сводятся к построению быстродействующих схем суммирования, а также схем, называемых *матричными умножителями*. Матричный умножитель 8×8 позволяет выполнить умножение байтных сомножителей за один такт.

Логические методы ускорения основаны на одновременном анализе нескольких разрядов множителя и выполнении соответствующих действии над суммой частных произведений (СЧП), в зависимости от анализируемых комбинаций. В практике построения схем АЛУ в основном используются методы ускоренного умножения на 2 и 4 разряда множителя.

1. **Ускоренное умножение на 2 разряда множителя**

Для определенности будем считать, что реализация метода осуществляется с использованием способа умножения от младших разрядов множителя со сдвигом СЧП вправо.

Идея метода состоит в анализе пары младших разрядов множителя на каждом шаге умножения. После выполнения действий над СЧП,

соответствующих анализируемой паре, производится сдвиг СЧП и множителя на 2 разряда вправо.

*Возможны следующие комбинации пары разрядов:*

**00** –производится только сдвиг вправо на 2 разряда, СЧП сохраняется;

**01** – производится сложение СЧП с множимым и последующий сдвиг на 2 разряда вправо;

**10** – СЧП складывается с удвоенным множимым (сложение с удвоенным множимым соответствует сложению со сдвинутым на 1 разряд влево множимым), множимое подается на вход сумматора не прямо, а с перекосом влево;

**11** – производится вычитание множимого из СЧП с последующим сдвигом на 2 разряда вправо. При этом используют так называемую корректирующую единицу, которую необходимо учитывать при умножении на следующую пару разрядов множителя путем сложения единицы с этой парой.

112 = 1002 – 012 (в данной паре умножение производится на (– 012), которое реализуется сложением СЧП с (-*А*)).

Другим способом реализации является вычитание множимого из старших разрядов СЧП.

В связи с необходимостью учета возможной добавки к очередной паре разрядов множителя в схему умножителя обычно вводится дополнительный бит для фиксации так называемого признака коррекции, поэтому выполняемое на каждом шаге действие над СЧП определяется не только парой младших разрядов множителя, но и значением этого признака. С учетом признака коррекции выполняемые действия можно свести к следующей таблице:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Пара младших разрядов множителя | Признак коррекции для этой пары | Действия, выполняемые над СЧП | Признак коррекции для следующей пары |
| **00**  **01**  **10**  **11** | 0  0  0  0 | -  +*А*  +2*А*  -*А* | 0  0  0  1 |
| **00**  **01**  **10**  **11** | 1  1  1  1 | +*А*  +2*А*  -*А*  - | 0  0  1  1 |

**Особенности реализации метода**

• В связи с тем, что выполняемые над СЧП действия включают в себя как сложение, так и вычитание множимого, СЧП необходимо рассматривать

как знаковое число (применительно к перемножению мантисс операндов с плавающей запятой).

• Поскольку одной из добавок к СЧП является 2*А*, для представления которого понадобится один дополнительный старший разряд, необходимо для представления результата сложения расширить СЧП на 2 старших разряда (для сохранения переноса, который может иметь место при сложении с удвоенным множимым). С учетом же знакового представления СЧП для явного отображения знака понадобится еще один дополнительный старший разряд.

• В связи со знаковым представлением СЧП, его сдвиг вправо для корректного представления выполняется как арифметический. Это означает, что в освобождающиеся при сдвиге старшие разряды производится копирование знакового разряда СЧП.

• Если после завершения умножения сохраняется единичное значение признака коррекции, необходимо выполнить дополнительный шаг, на котором к СЧП прибавляется множимое (как для пары (01)), после чего **сдвиг не выполняется**.

**Пример (умножение в формате *Ф2*).**

Для примера ограничимся 8 разрядами мантиссы.

*А* = (84,5)10 = 0,10101001 · 27;

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

15     14                                                           7     6                                                   0  
*В* = (45,75)10 = 0, 10110111 · 26.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

15     14                                                           7     6                                                   0  
         Перемножаются только мантиссы, знаки формируются отдельно.

Sign*C* = Sign*A* Sign *B.*

*XA* = P*A* + *d*;  *XB* = P*В* + *d*;

*XC* = *XA* + *XB* – *d;*

P*C*+ *d* = **P*A* + *d* + P*B***+ *d – d.*

                      P*C*

***XA***= 1  0  0  0  0  1  1  1   

***XB***= 1  0  0  0  0  1  1  0

***XA+XB***  = 1 0  0  0  0  1  1  0  1

***d***  =    1  0  0  0  0  0  0  0

***XC*** =    1  0  0  0  1  1  0  1

P*C* = 13.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **N** | **Операнды** | **СЧП (старшие разряды)** | | | | | | | | | | | **В/СЧП (младшие**  **разряды)** | | | | | | | | **Признак коррекции** |
| **0** | СЧП | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | **1** | **1** | 0 |
| **1** | [-M*A*]доп | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |  |  |  |  |  |  | -M*A* | | 1 |
| СЧП | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| СЧП→2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | **0** | **1** |
| **2** | 2*А* | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |  |  |  |  |  |  | 2M*A* | | 0 |
| СЧП | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| СЧП→2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | **1** | **1** |
| **3** | [-M*A*]доп | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |  |  |  |  |  |  | -M*A* | | 1 |
| СЧП | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| СЧП→2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | **1** | **0** |
| **4** | [-M*A*]доп | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |  |  |  |  |  |  | - M*A* | | 1 |
| СЧП | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| СЧП→2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **5** | M*А* | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| СЧП | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| ←М*С* | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

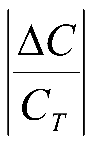
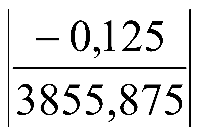
*XC = XC* – 1.

*C\** = (0.11110001)2 · 212 = (111100010000)2 = 3856.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

15     14                                                           7     6                                                   0  
 *C*T = 3855,875.

Δ*С* = *С*Т - *С*\* = 3855,875 – 3856 = - 0,125,

δ*С* = · 100% = · 100% = 0,0032%.

**9.3.2. Метод ускоренного умножения на 4 разряда множителя**

Предполагается, что умножение реализуется, начиная от младших разрядов множителя со

сдвигом СЧП вправо. На каждом шаге умножения анализируется младшая тетрада множителя, и, в зависимости от ее значения, выполняются соответствующие операции над текущим СЧП. Шаг завершается сдвигом СЧП и множителя на 4 разряда вправо. По аналогии с предыдущим методом сдвиг СЧП реализуется как арифметический (с учетом знака текущего СЧП).

Простейшая реализация метода умножения на 4 разряда сводится к разделению тетрады множителя на две пары и формированию соответствующей добавки (частного произведения) к СЧП для каждой из пар отдельно. При этом может иметь место случай формирования внутреннего признака коррекции для старшей пары тетрады при соответствующем значении младшей пары и возможным наличием внешнего признака коррекции, сформированного при умножении на предыдущую тетраду множителя.

При формировании частного произведения для старшей пары тетрады необходимо учитывать, что она имеет вес (100)2 = 4 по сравнению с младшей парой тетрады. Таким образом, в общем случае формируется два ненулевых частных произведения, которые могут быть как положительными, так и отрицательными и должны быть прибавлены к текущему значению СЧП. В соответствии с этим, максимального ускорения при схемной реализации этого метода можно достичь путем использования трехвходового сумматора.

Таблица действий над СЧП:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Младшая тетрада  множителя | Частные произведения | Признак коррекции для следующей тетрады |
| **0000**  **0001**  **0010**  **0011**  **0100**  **0101**  **0110**  **0111**  **1000**  **1001**  **1010**  **1011**  **1100**  **1101**  **1110**  **1111** | 0*А* + 0*А*  0*А* + 1*А*  0*А* + 2*А*  4*А* – *А*  4*А* + 0*А*  4*А* + *А*  4*А* + 2*А*  8*А* – *А*  8*А* + 0*А*  8*А* + *А*  8*А* + 2*А*  -4*А* – *А*  -4*А* + 0*А*  -4*А* + *А*  -4*А* + 2*А*  0*А* - *А* | 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  1  1  1  1 |

**Особенности реализации метода**

* Для получения положительных кратных множимого (2*А*, 4*А*, 8*А*) производится его сдвиг влево на 1, 2 или 3 разряда соответственно. Схемно подача кратных множимого реализуется путем «косой» передачи из регистра множимого на вход сумматора. При формировании кратных отрицательного множителя (-2*А*, -4*А*) осуществляется сдвиг отрицательного множимого, представленного в дополнительном коде, влево на 1 или 2 разряда соответственно.
* Для корректной реализации метода *n*-разрядный сумматор (*n* – разрядность мантисс сомножителей) необходимо расширить на 5 старших разрядов. Три из них необходимы для представления увосьмеренного множимого (8*А*), один – для сохранения возможного переноса при сложении и еще один – для явного представления знака СЧП.
* Остальные особенности такие же, как и у метода умножения на 2 разряда множителя.

**Пример (умножение в формате *Ф1*).**

*А* = 84,5 = (1010100,1)2 = (54,8)16 = (0,548)·162;

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

0       1                               7       8                                                           15

*В* = 45,75 = (101101,11)2 = (2D,C)16 = (0,2DC)16·162.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

0       1                             7      8                                                   15

***XA***  1   0   0   0   0   1   0***XA***  1   0   0   0   0   1   0

**+**

***XB***   1   0   0   0   0   1   0

***XA+XB***   1  0   0   0   0   1   0   0

**-**

***d***      1   0   0   0   0   0   0

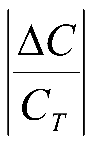
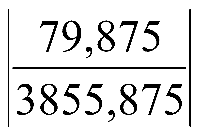
***XC***    1   0   0   0   1   0   0

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **N** | **Операнды** | **СЧП (старшие разряды)** | | | | | | | | | | | | | **В/СЧП (младшие разряды)** | | | | | | | | **Признак коррекции** |
| **0** | СЧП | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | **1** | **1** | **0** | **1** | 1 |
| МА | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |  |  |  |  | -4MA | | МА | |
| [-4MA]доп | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **1** | СЧП | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| СЧП→4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | **0** | **0** | **1** | **0** |
| 4МА | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  | 4MA | | -МА | |
| [-MA]доп | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **2** | СЧП | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |  |
| СЧП→4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 4←СЧП | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |

*С\** = (0,ЕС)16·163 = (ЕС0)16 = 3776.

*C*T = 3855,875.

Δ*С* = *С*Т - *С*\* = 3855,875 – 3776 = 79,875,

δ*С* = · 100% = · 100% = 2,0715%.

Погрешности результатов вызваны неточным представлением операндов. В формате *Ф2* операнды представлены точнее и погрешность меньше.